LIMIT

A. DEFINISI LIMIT

Untuk memahami apa yang dimaksud dengan limit, terdapat dua pendekatan untuk mendefinisikannya. Limit secara intuitif dan definisi limit secara formal.

Definisi limit secara intuitif

> $lim_{x \to c} f(x) = L$ *berarti bahwa apabila x mendekati namun berlainan dengan c maka nilai f(x) dekat dengan L.*

Perhatikan contoh berikut ini.

Pandanglah fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x-1}$ dengan domain fungsi D_f= {x I x € R, x ≠ 1}.

Perhatikan untuk x = 1, maka nilai fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x-1} = \frac{0}{0}$ = tak tentu. Selanjutnya berapakah nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1. Kita cari nilai-nilai $f(x)$ untuk x disekitar 1. Perhatikan tabel berikut memuat nilai-nilai $f(x)$ untuk x disekitar 1.

x	0,95	0,98	0,999	. . .	1	. . .	1,01	1,03	1,05
$f(x)$	1,95	1,98	1,999	. . .		. . .	2,01	2,03	2,05

Berdasarkan tabel di atas, untuk x mendekati 1 baik didekati dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi $f(x)$ makin mendekati 2. Dari sini kita mengatakan bahwa nilai limit $f(x)$ untuk x mendekati 1 adalah 2.

Definisi limit secara Formal

> $lim_{x \to c} f(x) = L$ didefinisikan sebagai untuk setiap $\varepsilon > 0$ seberapapun kecilnya yang diberikan, terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Kalimat terakhir berarti bahwa nilai f(x) dapat dibuat sebarang dekat ke L asalkan x cukup dekat ke c.

Contoh 1 :

Buktikan $lim_{x \to 1}\, x + 1 = 2$ menggunakan definisi formal.

Penyelesaian :

Analisis Pendahuluan : Misalkan ebsilon positif ,maka kita harus menemukan delta positif sehingga

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(x + 1) - 2| < \varepsilon$$

Perhatikan ketaksamaan disebelah kanan

$|(x + 1) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon$

Sekarang kita dapat menentukan δ yang akan kita pilih. Pilih $\delta = \varepsilon$

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \varepsilon$. Sedemikan hingga jika $0 < |x - 1| < \delta$ maka

$|(x + 1) - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$

$|x - 1| < \varepsilon$

(dengan kata lain, nilai f(x) dapat dibuat dalam radius ε dari 2 asalkan x $\neq$ 1 dan berada dalam radius δ dari 1.

Contoh 2 :

Buktikan bahwa $lim_{x \to 3}\, (2\,x - 1) = 5$ menggunaakan definisi formal.

Penyelesaian :

Analisis Pendahuluan : Misalkan ebsilon positif ,maka kita harus menemukan delta positif sehingga

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

Perhatikan ketaksamaan disebelah kanan

$$
\begin{aligned}
|(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 6| &< \varepsilon \\
|2(x - 3)| &< \varepsilon \\
2\,|x - 3| &< \varepsilon \\
|x - 3| &< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Sekarang kita dapat menentukan δ yang akan kita pilih. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Bukti Formal :

Ambil Sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Maka $0 < |x - 3| < \delta$ sedemikan hingga

$|(2x-1)-5| = |2x-6| = 2\,|x-3| < 2\,\delta$

$$|(2x-1)-5| < 2\,\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|(2x-1)-5| < \varepsilon$$

Teorema Limit

Misalkan merupakan bilangan bulat positif, k merupakan konstanta, f dan g merupakan fungsi yang memiliki nilai limit di c maka :

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} k\,f(x) = k\ \lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c}[f(x).\,g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\ .\ \lim_{x\to c} g(x)$
7. $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, dengan $g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n$
9. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ dengan $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$

Teorema Subtitusi

Jika f merupakan fungsi polynomial atau fungsi rasional maka

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Asalkan $f(c)$ terdefinisi. Pada kasus fungsi rasional maka nilai penyebut di c tidak nol.

Contoh 3.

Hitunglah $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3+2x-1}{x-2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2x-1}{x-2} = \frac{3^3+2(3)-1}{3-2} = \frac{32}{1} = 32$$

Contoh 4.

Hitunglah $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x+2}{x-2}$

Penyelesaian :

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x+2}{x-2}$.

Perhatikan limit penyebut pada fungsi rasional tersebut adalah 0. Sekalipun pembilang fungsi tersebut ada yaitu 8. Kita lihat ketika x mendekati 1, maka kita membagi bilangan yang dekat dengan 11 dengan bilangan positif dekat dengan 1. Ketika kita lebih dekati x dengan 1 maka hasilnya akan semakin membesar. Maka kita mengatakan bahwa nilai limit + ∞ .

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x+2}{x-2} = +\infty .$$

B. LIMIT FUNGSI

1. LIMIT FUNGSI ALJABAR *(dikerjakan sebagai tugas)*

a. Buktikan limit berikut dengan definisi formal

1. $\lim_{x \to -21} (3x - 1) = -64$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$

b. Hitunglah limit berikut. (*Gunakan teorema-teorema pada limit yang telah anda pelajarai. Pada beberapa kasus, anda dapat menggunakan manipulasi aljabar terlebih dahulu untuk penyelesaiannya).*

1. $\lim_{x \to 3} \sqrt{3x - 5}$

2. $\lim_{t \to 5} [2t^4 - 9t^3 + 19]^{-\frac{1}{2}}$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

5. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + ux - x - u}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x \to -2} \sqrt{-3x^3 + 7x^2}$

7. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$

2. LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Sebelum masuk pada materi limit trigonometri, coba diingat kembali nilai-nilai pada sudut sudut istimewa berikut:

Sin 0^0 = ______	Cos 0^0 = ________	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
Sin 30^0 = ______	Cos 30^0 = ________	$\cot\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$
Sin 45^0 = ______	Cos 45^0 = ________	$\sec\ x = \frac{1}{\cos x}$
Sin 60^0 = ______	Cos 60^0 = ________	cosec $x = \frac{1}{\sin x}$
Sin 90^0 = ______	Cos 90^0 = ________	

A. Teorema Limit Trigonometri

Untuk setiap c bilangan real :

1. $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$
2. $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$
3. $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$
4. $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$
5. $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$
6. $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$

B. Teorema Khusus Fungsi Trigonometri

1. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
2. $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos\ t}{t} = 0$

Sebagai tugas, buktikan $\boldsymbol{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1}$ ***dan*** $\boldsymbol{\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos\ t}{t} = 0}$